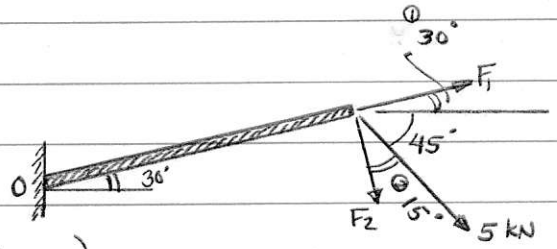
method ② :- تحليل القوة (5 kN) الى مركبتين احداهما موازية للجسم والاخرى عمودية على الجسم

بعد تحليل القوة (5 kN) الى مركباتها F_1 و F_2 وتحديد الزوايا ، نجد بأن :-

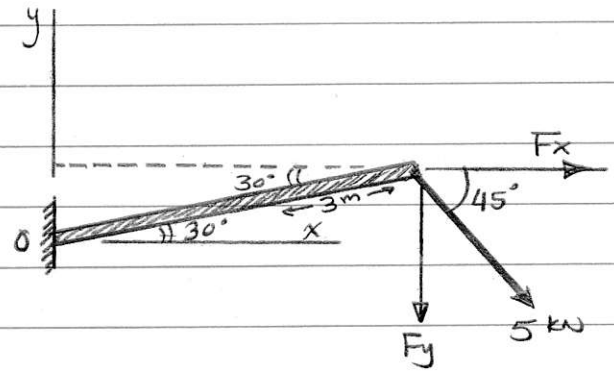
$F_2 = 5 \cos 15^\circ$ arm = 3 m

$F_1 = 5 \sin 15^\circ$ arm = 0 m



$\therefore M_{@O} = (5 \cos 15)(3) = 14.49 \text{ N.m}$ ↻

method ③ :- تحليل القوة (5 kN) الى مركباتها على محوري x و y ومن ثم ايجاد ذراع كل قوة Fx أو Fy



$\therefore F_x = (5 \cos 45^\circ)^N$

ذراع القوة Fx هو الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث ذو الوتر (3m) [المثلث فوق الجسم]

$\therefore arm = 3 \sin 30^\circ$

and $F_y = (5 \sin 45^\circ)^N$

ذراع القوة Fy هو الضلع المجاور للزاوية 30° في المثلث ذو الوتر (3m) [المثلث فوق الجسم]

$\therefore arm = 3 \cos 30^\circ$

$\therefore M_{@O} = -(5 \cos 45)(3 \sin 30) - (5 \sin 45)(3 \cos 30^\circ)$

$= -5.3 - 9.19 = 14.49 \text{ N.m}$ ↻

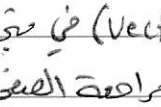
4.2. Cross Product

هناك طريقتين لضرب متجه (Vector) في متجه (vector)

الطريقة الاولى: Dot Product (مراجعة الصفحات ٥٥ و ٥٦ من الفصل الثاني)

- يرمز لعملية الضرب هذه بالاشارة (•) ، مثلاً $\vec{A}\cdot\vec{B}$
- تستخدم هذه الطريقة في ضرب المتجهات لايجاد الزاوية بين متجهين :-

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,B\cos\theta$$



- ناتج عملية الضرب بطريقة (Dot) هو كمية عددية (scalar) وليس (vector)
- $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
- $a(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (a\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(a\vec{B})$ ← كمية عددية
- $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{B}) + (\vec{A}\cdot\vec{D})$
- عند تمثيل المتجهات بصيغة (Cartesian Vector) (i, j, k) فأن :-

if $\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$ and $\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$

then $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

الطريقة الثانية: Cross Product

- يرمز لعملية الضرب هذه بالاشارة (X)، مثلاً $\vec{A}\times\vec{B}$
- ناتج عملية الضرب بطريقة (Cross) هو متجه جديد عمودي على كلا المتجهين :-

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}$$

- المتجه الناتج من عملية الضرب بطريقة الـ (Cross) له خواص (مقدار واتجاه) :-

* مقدار المتجه (C) هو :-

$$C = A\,B\sin\theta$$

حيث ان (θ) هي الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في نقطة التقائهما وتتراوح قيمتها $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

* اتجاه المتجه (C) هو عمودي على كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$ (عمودي على المستوي الذي يحتوي المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$) ويحدد اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى (اذا كانت $\vec{A}\times\vec{B}$ فنحرك اصابع اليد اليمنى من المتجه $\vec{A}$ الى المتجه $\vec{B}$ وبذلك يكون اتجاه الناتج ($\vec{C}$) هو باتجاه ابهام اليد اليمنى).

$$\therefore \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \underbrace{(AB\sin\theta)}_{\text{magnitude}}\, u_c$$

u_c ← unit vector in the direction of $\vec{C}$

من خواص عملية (Cross Product) :-

* $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$
* $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
* $a(\vec{A} \times \vec{B}) = (a\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (a\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})a$
* $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{D})$ المحافظة على ترتيب المتجهات

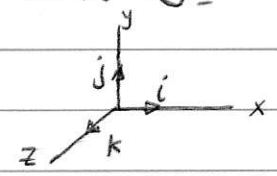
Cartesian Vector Formulation :-

* عند تمثيل المتجهات بصيغة (i ، j ، k) فأن ذلك يتطلب اولاً ان نتذكر بأن :-

$i \times i = (1)(1)(\sin 0^\circ) = 0$

$i \times j = (1)(1)(\sin 90^\circ) = k$ بأتجاه موجب z

$i \times k = (1)(1)(\sin 90^\circ) = -k$ بأتجاه سالب z



وهكذا لبقية unit vectors

$i \times i = 0$

$j \times j = 0$

$k \times k = 0$

$j \times k = i$ $k \times j = -i$

$k \times i = j$ $i \times k = -j$

* لو ان المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ تم تمثيلهما بصيغة i ، j ، k ، فأن :-

$$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k \quad \text{and} \quad \vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k)$$

$$= (0 + A_x B_y k - A_x B_z j)$$
$$+ (-A_y B_x k + 0 + A_y B_z i)$$
$$+ (A_z B_x j - A_z B_y i + 0)$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)i - (A_x B_z - A_z B_x)j + (A_x B_y - A_y B_x)k$$

أو يمكن استخدام المحددات determinants ، (طريقة سهلة)